№13-дәріс

Бірінші ретті дербес туындылар. Бірінші ретті дербес және толық дифференциалдар

9.2.1 Айқын түрде берілген функциялардың дербес туындылары

$y = const$ деп есептеп, x-ке Δx өсімшесін береміз $(x + \Delta x \in D)$. Онда z функциясының x бойынша дербес өсімшесі:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Дәл осылай, z функциясының y бойынша дербес өсімшесін табамыз:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Егер x пен y-тің екеуіне де сәйкесінше $\Delta x, \Delta y$ өсімшелерін беретін болсақ, онда z функциясының толық өсімшесін аламыз:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \qquad (1)$$

Жалпы жағдайда, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$ болатынын айта кеткен жөн.

Анықтама 10. Егер $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ $\left[\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}\right]$ табылса, **оны** z **функциясының** x **бойынша** [z функциясының y бойынша**]** **<u>дербес туындысы</u>** деп айтамыз және былай белгілейміз: $\dfrac{\partial z}{\partial x}, z'_x, \dfrac{\partial f}{\partial x}, f'_x$ $\left[\dfrac{\partial z}{\partial y}, z'_y, \dfrac{\partial f}{\partial y}, f'_y\right]$.

Екінші анықтамадан, егер қандай да бір айнымалы бойынша дербес туынды табатын болсақ, онда бұл айнымалыдан басқа айнымалылардың барлығын тұрақты деп қарастырамыз.

Мысал 9. $u = xy^2z^3$ функциясы берілген.Оның оның дербес туындылары:

х- бойынша дербес туынды тапқанда, х-тан басқа айнымалыларды (y, z) «тұрақты» деп есептейміз.

U функциясынан у- бойынша дербес туынды тапқанда, у-тан басқа айнымалыларды (x, z) «тұрақты» деп есептейміз.

U функциясынан z- бойынша дербес туынды тапқанда, z-тан басқа айнымалыларды (x, y) «тұрақты» деп есептейміз

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3, \quad u'_z = 3xy^2z^2$$

Мысал 10. $z = arctg\dfrac{y}{x}.$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ *тап.*

Δ y-ті тұрақты деп қарастырып:

$$\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \left(y\cdot\frac{1}{x}\right)'_x = y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$ аламыз.

Енді x-ті тұрақты деп қарастырып:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arctg\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x\left(1+(y/x)^2\right)} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Δ

Мысал 11. $z = xe^{-xy}$. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *тап.*

Δ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xe^{-xy}\right)'_x = (x)'_x e^{-xy} + x\left(e^{-xy}\right)'_x = e^{-xy} - xye^{-xy} = e^{-xy}(1-xy),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(xe^{-xy}\right)'_y = -x^2e^{-xy}.$$ Δ

Мысал 12. $z = \frac{\cos y^2}{x}$. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *тап.*

$$z = \frac{\cos y^2}{x} = \cos y^2\cdot\frac{1}{x}$$

$$z'_x = \left(\frac{\cos y^2}{x}\right)'_x = \left(\cos y^2\cdot\frac{1}{x}\right)'_x = \cos y^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Δ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\cos y^2}{x}\right)'_x = \frac{-\cos y^2}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\cos y^2}{x}\right)'_y = \frac{-2y\sin y^2}{x}.$$ Δ

12.2.2 $F(x,y,z)=0$ **айқын емес функциясының дифференциалы**

F, F'_x, F'_y, F'_z табылып және үзіліссіз болса, онда

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad F'_z \neq 0.$$

Бір айнымалы функция үшін $F(x,y)=0$, $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$

Мысал 13.

а) $x^2y^3 - \cos y = 0$.

$$F'_x = 2xy^3, \quad F'_y = 3x^2y^2 + \sin y \quad \Rightarrow \quad y'_x = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2 + \sin y}$$

б) $x^2y - e^{xz} = 0$

$$F'_x = 2xy - ze^{xz}, \quad F'_y = x^2, \quad F'_z = -e^{xz}x \ \Rightarrow z'_x = \frac{2xy - ze^{xz}}{xe^{xz}}; \quad z'_y = \frac{x^2}{xe^{xz}}.$$